装　订　线

省、市

学　校

考　号

姓　名

联系电话

辅导老师

装　订　线

折　叠　线　密　封　线

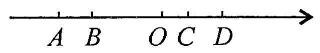
第十一届“创新杯”全国数学邀请赛
初中一年级试卷

（考试时间:120 分钟）

一、选择题（$5'\times 8=40'$）　以下每题的四个选项中,仅有一个是正确的,请将表示正确答案的字母填在下面的表格中.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								

1. 数 a,b,c,d 所对应的点 A、B、C、D 在数轴上的位置如图所示,那么



A. $a+c<b+d$　　B. $a+c=b+d$

C. $a+c>b+d$　　D. $a+c$ 与 $b+d$ 的大小关系不能确定

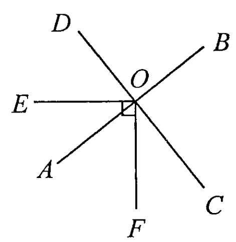
2. 将 $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$ 加上一个数后,使其和为 1。那么,加上的这个数是

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{7}$

3. 当 $x=0$,$x=1$ 时,代数式 ax^3+bx+c 的值依次是 1 和 2,则当 $x=-1$ 时,ax^3+bx+c 的值为

A. 0　　B. -1　　C. -2　　D. 1

4. 直线 AB、CD 交于 O,OE 平分 $\angle AOD$,$OF\perp OE$ 于 O,若 $\angle BOC=80°$,则 $\angle DOF$ 等于



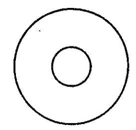
A. 100°　　B. 115°

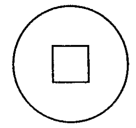
C. 120°　　D. 130°

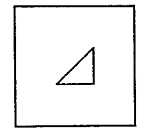
5. 观察下列事实:$|x|+|y|=1$ 的不同整数解 (x,y) 的个数是 4,$|x|+|y|=2$ 的不同整数解 (x,y) 的个数是 8,$|x|+|y|=3$ 的不同整数解 (x,y) 的个数是 12,…,则 $|x|+|y|=20$ 的不同整数解 (x,y) 的个数为

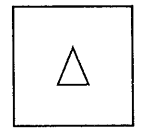
A. 76　　B. 80　　C. 286　　D. 92

6. 某几何体从正面看和从左面看均如图 1 所示,则该几何体从上面看的图形不可能是


A


B


C


D

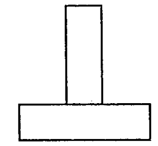
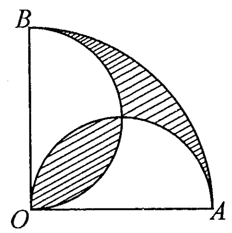


图1

7. 如图,在圆心角为直角的扇形 OAB 中,分别以 OA,OB 为直径作两个半圆. 若 $OA=2$,阴影部分的面积是



A. $\pi-2$　　B. $\frac{\pi}{2}-1$　　C. 2　　D. 1

8. 平面上不共线三点 A,B,C 的横、纵坐标都是整数,且 $\triangle ABC$ 的三边也是整数,则 AB 可能取得的最小值是

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题（$5'\times 8=40'$）

9. 若 $(a-1)^2+|b+2|=0$,则 $\dfrac{(a-b)^2+(a+b)^{2012}}{2ab+(a+b)^{2013}}=$__________.

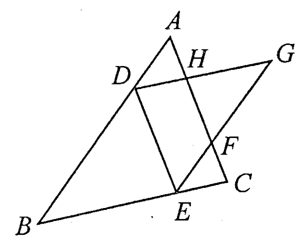
10. 若 $(2\frac{7}{9}+1\frac{6}{19})x=-(19\frac{4}{9}+9\frac{4}{19})$,则 $x=$__________.

11. 某种商品的市场零售价,去年比前年上涨了 25%. 有关部门通过宏观调控,稳定了涨幅,使得今年比前年上涨了 15%,则今年比去年的市场零售价降低了__________.

12. 若 6033 位数 $\underbrace{\overline{abcabc\cdots abc}}_{2011\text{个}abc}$ 是 91 的倍数. 则三位数 $\overline{abc}$ 的最小值是__________.

13. 一个凸 n 边形,除了一个内角外,其余 $(n-1)$ 个内角的和是 2000°,则 $n=$__________.

14. 如图,将 $\triangle ABC$ 沿 DE 折叠,得到一个七边形 $ADECFGH$. 若七边形和原三角形的面积比为 $2:3$,且折叠后重叠部分的面积是 4,则原三角形的面积为__________.

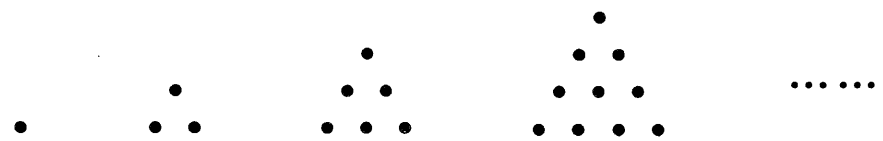


15. 依法纳税是每个公民的义务。每月实发工资不超过3500元的不纳税，超过3500元的部分称作应纳税所得额，按应纳税所得额计税：缴纳金额 = 全月应纳税所得额 × 税率 − 速算扣除数
税率表如下：

级数	全月应纳税所得额	税率(%)	速算扣除数
1	不超过1,500元	3	0
2	超过1,500元至4,500元的部分	10	105
3	超过4,500元至9,000元的部分	20	555
4	超过9,000元至35,000元的部分	25	1,005
5	超过35,000元至55,000元的部分	30	2,755
6	超过55,000元至80,000元的部分	35	5,505
7	超过80,000元的部分	45	13,505

已知张先生2013年4月缴纳税款60元，则张先生这个月税后所得工资为__________元.

16. 传说古希腊毕达哥拉斯学派的数学家经常在沙滩上面画点或用小石子表示数. 他们研究过如下所示的三角形图：



如果将点数被5整除的三角形图按从小到大的顺序排列起来，那么第2013个被5整除的三角形图在原来图形的排列中是第__________个.

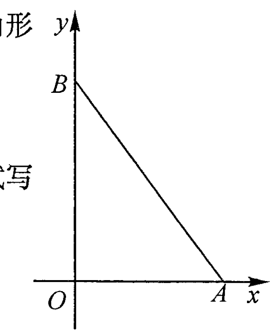
三、解答题(第17题20分，第18、19题各25分，共70分)

17. 一辆加装40升燃料的汽车，以每小时70千米的速度行驶. 已知按照这一速度行驶时，每升燃料行驶12千米. 由于燃料箱发生泄漏，该汽车行驶360千米后就耗尽了燃料. 如果燃料箱以恒速泄漏，问每小时泄漏燃料多少升？(精确到0.01升)

18. 如图所示的直角坐标系中，$\triangle AOB$ 的三边分别为3，4，5. 将这个三角形向右平移1个单位，得到时 $\triangle A'O'B'$.

(Ⅰ)试写出 A'，B' 两点的坐标；

(Ⅱ)在边 $A'B'$ 上是否存在一点 P，使 $\angle OPB$ 是直角？如果存在，试写出点 P 的坐标，并说明理由；如果不存在，也要说明理由.



19. (Ⅰ)把数1，2，…，2013放到 k 个盒子中，使每个盒子中数之和相等，k 的最大值是多少？(直接给出结果)

(Ⅱ)把数1，2，…，n 放到 k 个盒子中，使每个盒子中数之和相等，k 的最大值是多少？(须说明理由)

三、解答题(第17题20分,第18、19题25分,共70分)

17. 平面上四个点,每一点都是其余三点为顶点的三角形的垂心,我们约称:这样的四个点为一个“垂心组”.

证明:(1)任意三角形的三个顶点和垂心这四个点是一个“垂心组”;(图1)

(2)任意三角形内、外角平分线的四个交点是一个“垂心组”.(图2)

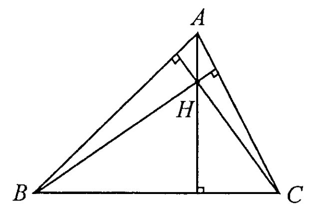


图1

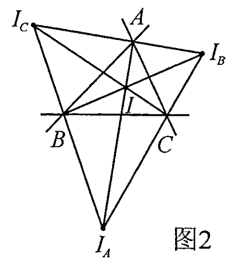


图2

18. 已知实数 k 满足 $k^4-3k^2-4=0$,设直线 $y=kx+6-k$ 与双曲线 $y=\frac{10-k^2}{x}$ 的两个公共点为 A、B. 求 $\triangle OAB$ 的面积.

19. n 为正整数,a、b、c 为互不相等的正整数,且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=n$. 把 a、b、c 重新排列得到 x、y、z,求 $|x-a|+|y-b|+|z-c|$ 的最大值.

装订线

省、市

学校

考号

姓名

联系电话

辅导老师

折叠线 密封线

装订线

第十一届"创新杯"全国数学邀请赛
初中二年级试卷

（考试时间:120 分钟）

一、选择题($5'\times 8=40'$)　以下每题的四个选项中,仅有一个是正确的,请将表示正确答案的字母填在下面的表格中.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								

1.若 $a^x=6$,$a^y=9$,则 $a^{2x-y}=$

A.3　　B.4　　C.6　　D.9

2.若 $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca=0$. 则$\frac{a}{b+c}=$

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

3.已知多项式 x^3+ax^2+bx+c 有因式 x^2+x-2,则$\frac{2b+c}{2a+c}=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

4.已知 P 为$\triangle ABC$ 内任一点,若$\triangle ABC$ 的周长是 20,则 $l=PA+PB+PC$ 满足不等式

A. $5<l<10$　　B. $15<l<20$　　C. $10<l<15$　　D. $10<l<20$

5. R 是$\angle XOY$ 平分线上的任一点,点 P 在 OX 上,点 M 在 OY 上,$MQ/\!/RP$ 交 OX 于 Q,$PN/\!/RM$ 交 OY 于 N,那么 PQ 与 MN 的大小关系是

A. $PQ>MN$　　B. $PQ=MN$　　C. $PQ<MN$　　D. 不能确定

6.在$\triangle ABC$ 中,M、N 分别在 AC、BC 上,且 $AM=BN$,E、D 分别是 AB、MN 的中点,ED 交边 AC 或其延长线于 F. 若$\triangle ABC$ 的周长是 20,则 $AE+AF=$

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

7.已知正 $n+1$ 边形与正 n 边形的内角相差整数度,那么满足这一条件的正整数 n 有(　　)个.

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

8.若干人沿东西方向的一条直线站成一横排,其中,$2m$ 人面向南,$(2n+1)$人面向北,每次让其中任意 4 人向后转(不论原来的方向如何),经过若干次后,能否使全部都面向南、全部都面向北?

A. 能使都面向南,也能使都面向北　　B. 能使都面向南,不能使都面向北

C. 不能使都面向南,能使都面向北　　D. 不能使都面向南,也不能使都面向北

二、填空题($5'\times 8=40'$)

9.若$\frac{ab}{a+b}=12$,$\frac{bc}{b+c}=20$,$\frac{ca}{c+a}=15$,则$\frac{abc}{ab+bc+ca}=$________.

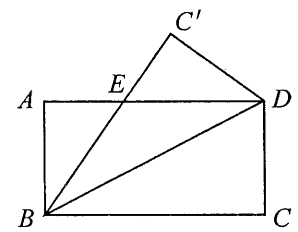
10.若 $m\neq 0$,$4x+7y+z=3m$,$3x+5y+z=2m$,则$\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}=$________.

11.若 x^3+ax^2+bx+c 能被 x^2-bx+c 整除($c\neq 0$),则 $a-b+c$ 的值是________.

12.设 AM 是$\triangle ABC$ 的中线,$AB=10-\frac{\pi}{8}$,$AC=1+\frac{\pi}{8}$,且 AM 的长为整数,则 AM 的整数值是________.

13.在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,AD 是高,且 $AD+BC=AB+AC$,$\triangle ABC$ 的周长等于 16. 则$\triangle ABC$ 的面积是________.

14.如图,将矩形 $ABCD$ 沿直线 BD 折叠,使点 C 落在 C'处,BC'交 AD 于 E. 若 $AD=2a$,$AB=a$,则$\triangle BED$ 的面积 $S_{\triangle BED}=$________.



15.已知:a,b,c 都是整数,且没有大于 1 的公约数,ax^2+bx+c 是多项式 x^4+2x^2+9 和 $3x^4-2x^2+16x+3$的公因式,则当 $x=1$ 时,ax^2+bx+c 的值为________.

16.在 $Rt\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,点 P_1、P_2、…、P_7 依次将斜边 AB 分为 8 等分,若 $CP_1^2+CP_2^2+\cdots+CP_7^2=35$,则 AB 的长度为________.

第十一届“创新杯”全国数学邀请赛
初中二年级试卷标准答案

一、选择题($5'\times 8=40'$)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	A	D	B	C	C	C

二、填空题($5'\times 8=40'$)

题号	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	10	3	1	5	12	$\frac{5}{8}a^2$	2	4

三、解答题(第17题20分,第18、19题各25分,共70分)

17.(1)证明:如图1,H是$\triangle ABC$是的垂心,从而$AH\perp BC$,$BH\perp AC$,$CH\perp AB$. …2′

在$\triangle HBC$中,仍然有$AH\perp BC$,$AB\perp CH$,$AC\perp BH$,

所以A是$\triangle HBC$的垂心. …6′

同理,B是$\triangle HAC$的垂心,C是$\triangle HBA$的垂心. …8′

因此A、B、C、H是一个“垂心组”. …10′

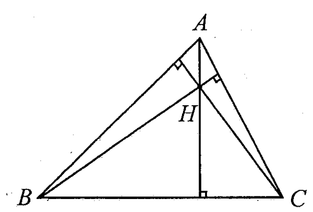


图1

(2)证明:设I是$\triangle ABC$内角平分线交点,I_A、I_B、I_C分别是$\angle BAC$、$\angle ABC$、$\angle ACB$平分线与外角平分线的交点.

则A、I、I_A共线(都在AI_A上).

同理B、I、I_B共线,C、I、I_C共线.

又AI_A平分$\angle BAC$,AI_B、AI_C都平分$\angle BAC$相邻的外角,所以

$\angle I_AAI_B=90°$,$\angle I_AAI_C=90°$,$\angle I_AAI_B+\angle I_AAI_C=180°$,

故I_B、A、I_C共线,且$I_AA\perp I_BI_C$, …14′

同理,I_C、B、I_A共线,且$I_BB\perp I_CI_A$,

I_A、C、I_B共线,且$I_CC\perp I_AI_B$, …16′

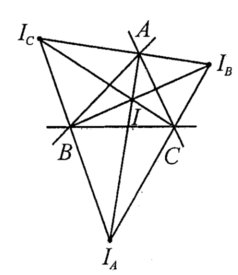


图2

从而,A、B、C分别在$\triangle I_AI_BI_C$的边I_BI_C、I_CI_A、I_AI_B上.

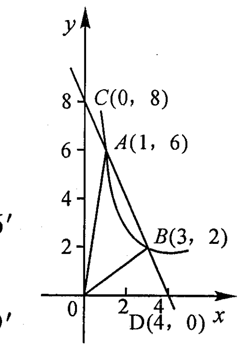
I_AA与I_BB都经过点I,则I是$\triangle I_AI_BI_C$的垂心. …18′

由(1)得,I、I_A、I_B、I_C四点是一个“垂心组”. 故原命题成立. …20′

18. 解:$\because k^4-3k^2-4=0$,$\therefore (k^2-4)(k^2+1)=0$. 而$k^2+1\neq 0$

$\therefore k^2-4=0$. 解得$k=-2$或$k=2$ …2′

(1)当$k=-2$时,得直线$y=-2x+8$,双曲线为$y=\frac{6}{x}$.



联立方程,得$-2x+8=\frac{6}{x}$,整理得$x^2-4x+3=0$.

即$(x-1)(x-3)=0$,解得$x_1=1$,$x_2=3$.

分别代入$y=\frac{6}{x}$,得$y_1=6$,$y_2=2$. $\therefore A(1,6)$、$B(3,2)$. …6′

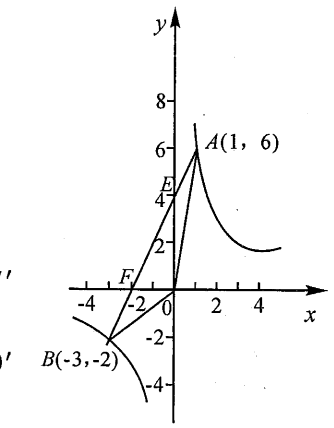
设直线$y=-2x+8$与y轴、x轴分别交于C、D,

则得$C(0,8)$、$D(4,0)$, …9′

计算,得$S_{\triangle OCD}=16$,$S_{\triangle OCA}=4$,$S_{\triangle OBD}=4$,

$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OCD}-S_{\triangle OCA}-S_{\triangle OBD}=16-4-4=8$. 这时,$\triangle OAB$的面积为8. …14′

(2)当$k=2$时,得直线$y=2x+4$,双曲线为$y=\frac{6}{x}$.



从而得$2x+4=\frac{6}{x}$,整理得$x^2+2x-3=0$.

即$(x-1)(x+3)=0$,解得$x_1=1$,$x_2=-3$.

分别代入$y=\frac{6}{x}$,得$y_1=6$,$y_2=-2$.

$\therefore A(1,6)$、$B(-3,-2)$. …17′

设直线$y=2x+4$与y轴、x轴分别交于E、F,

则得$E(0,4)$、$F(-2,0)$, …20′

计算,得$S_{\triangle OEF}=4$,$S_{\triangle OAE}=2$,$S_{\triangle OBF}=2$,

$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OAE}+S_{\triangle OEF}+S_{\triangle OFB}=4+2+2=8$.

这时,$\triangle OAB$的面积为8. …25′

所以所求$\triangle OAB$的面积为8(平方单位).

19. 解:$\because a$、b、c为互不相等的正整数,不妨设$a<b<c$,则$a\geqslant 1$,$b\geqslant 2$,$c\geqslant 3$.

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$. n为正整数,$\therefore n=1$. …3′

$\because \frac{1}{a}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{3}{a}$,即$\frac{1}{a}<1<\frac{3}{a}$,$\therefore 1<a<3$,$\therefore a=2$. …6′

于是$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$,推得:$\frac{1}{b}<\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{2}{b}$,即$\frac{1}{b}<\frac{1}{2}<\frac{2}{b}$$\therefore 2<b<4$,$\therefore b=3$. …9′

由$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$,即$\frac{1}{3}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$,得$c=6$. …12′

令$W=|x-a|+|y-b|+|z-c|=|x-2|+|y-3|+|z-6|$ …15′

由题设条件知:

①$\begin{cases}x=2\\y=3,\\z=6\end{cases}$ ②$\begin{cases}x=2\\y=6,\\z=3\end{cases}$ ③$\begin{cases}x=3\\y=2,\\z=6\end{cases}$ ④$\begin{cases}x=3\\y=6,\\z=2\end{cases}$ ⑤$\begin{cases}x=6\\y=2,\\z=3\end{cases}$ ⑥$\begin{cases}x=6\\y=3.\\z=2\end{cases}$ …20′

由①得$W=0$;由②得$W=6$;由③得$W=2$;由④得$W=8$;由⑤得$W=8$;由⑥得$W=8$.

因此$|x-a|+|y-b|+|z-c|$的最大值是8. …25′

第十一届“创新杯”全国数学邀请赛
初中一年级试卷标准答案

一、选择题($5'\times 8=40'$)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	A	D	B	D	A	C

二、填空题($5'\times 8=40'$)

题号	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	-2	-7	8%	182	14	12	5090	5034

三、解答题(第17题20分,第18、19题各25分,共70分)

17. 解:由条件知,泄漏的燃料为 $40-(360\div 12)=10$(升) …7′

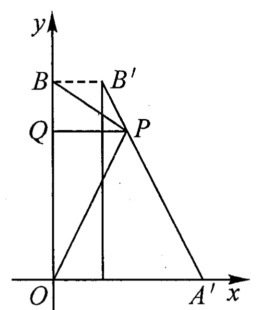
行驶所用的时间 $360\div 70=\frac{36}{7}$(时) …14′

所以每小时泄漏燃料为 $10\div\frac{36}{7}=1.94$(升) …20′

18. 解:(Ⅰ)$A'(4,0)$,$B'(1,4)$ …5′

(Ⅱ)设点 P 是 $A'B'$ 上靠近 B' 的一个五等分点. 则点 P 的横坐标是 $1+3\times\frac{1}{5}=\frac{8}{5}$;

点 P 的纵坐标是 $4\times\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$. 故 $P(\frac{8}{5},\frac{16}{5})$. …10′



由点 P 是五等分点,$A'B'=5$,得 $B'B=B'P=1$.

则 $\angle B'BP=\angle B'PB$.

作 PQ 平行于 $B'B$ 交 y 轴于点 Q,则 $\angle B'BP=\angle BPQ$,

所以 $\angle B'PB=\angle BPQ$. …16′

同理 $\angle A'PO=\angle OPQ$. …20′

于是 $\angle OPB=\angle OPQ+\angle BPQ=\angle A'PO+\angle B'PB$,

而 $\angle OPB+(\angle A'PO+\angle B'PB)=180°$

所以 $\angle OPB=90°$,即在边 $A'B'$ 上存在点 P,使 $\angle OPB$ 是直角. …25′

19. 解:(Ⅰ)k 的最大值是 1007. …7′

(Ⅱ)在每一放法中,某个盒子必定包含 n,因而每个盒子中数之和大于或等于 n,因而

$kn\leqslant 1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,即 $k\leqslant\frac{n+1}{2}$.

注意,其中 k 为整数, …12′

①当 n 为奇数时,$k\leqslant\frac{n+1}{2}$;

又 $\{n\}$,$\{1,n-1\}$,$\{2,n-2\}$,…,$\{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}\}$,

说明可以把这 n 个数放到 $\frac{n+1}{2}$ 个盒子里; …17′

②当 n 为偶数时,$k\leqslant\frac{n}{2}$;

又 $\{1,n\}$,$\{2,n-1\}$,…,$\{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1\}$,

说明可以把这 n 个数放到 $\frac{n}{2}$ 个盒子里; …22′

综合,当 n 为奇数时,k 的最大值是 $\frac{n+1}{2}$;当 n 为偶数时,k 的最大值是 $\frac{n}{2}$. …25′