

# 第十届“创新杯”全国数学邀请赛

## 初中三年级试卷

### 一、选择题(共8小题,每小题5分,共40分)

以下各题的四个选项中,有且仅有一个是正确的,请将表示正确答案的字母填在下面的表格中:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								

1. 方程组  $\begin{cases} (x-1)(y-1) = -1 \\ x^2y + xy^2 = 3 \end{cases}$  实数解有

- A. 1个      B. 2个      C. 3个      D. 4个

2. 已知 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $AB > AC$ , $E, F$ 分别是边 $AB, AC$ 上的点,且 $\angle BCE = \angle CBF = \frac{1}{2}\angle A$ ,

那么线段 $BE$ 与 $CF$ 的大小关系是

- A.  $BE > CF$       B.  $BE = CF$       C.  $BE < CF$       D. 不能确定

3. 已知关于 $x$ 的方程 $x^2 - 2(m+3)x - 6m^2 = 0$ 两个实数根的绝对值的比为2:3,则 $m$ 的值为

- A. 2或-3      B. -2或3      C. 2或6      D. -2或-6

4. 若 $f(x^2+1) = x^4 + 5x^2 + 3$ ,则 $f(x^2-1) =$

- A.  $x^4 - x^2 - 3$       B.  $x^4 + x^2 - 3$       C.  $x^4 + x^2 + 3$       D.  $x^4 - 5x^2 + 3$

5. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 不经过第二象限,在 $x$ 轴上截得线段的长为2,且 $a+b+c=0$ ,那么它的顶点坐标是

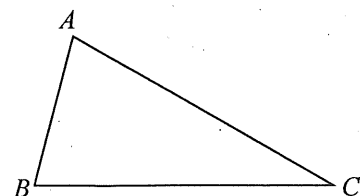
- A.  $(2, a)$       B.  $(2, -a)$       C.  $(b, \frac{1}{a})$       D.  $(-\frac{1}{b}, -\frac{1}{a})$

6. 一个三角形的两条高分别为4,12,第三条高也是整数,则第三条高的长度最大值为

- A. 3      B. 4      C. 5      D. 6

7. 在 $\triangle ABC$ 中,如果 $AC = 2AB$ ,那么 $\angle B$ 与 $2\angle C$ 的大小关系是

- A.  $\angle B > 2\angle C$   
 B.  $\angle B = 2\angle C$   
 C.  $\angle B < 2\angle C$   
 D. 不确定



8. 已知凸四边形内接于圆,四条边依次为 $5(\sqrt{7}-1), 12, 5(\sqrt{7}+1), 16$ ,那么它的四条边与劣弧构成的四个弓形的面积和( $\pi$ 取3.14)为

- A. 171      B. 143      C.  $96\sqrt{7}$       D.  $75\sqrt{7}$

### 二、填空题(共8小题,每小题5分,共40分)

9. 已知 $a, b$ 是互不相等的实数,那么关于 $x$ 的方程 $\frac{x+a}{x+b} + \frac{3x+3b}{x+a} = \frac{7}{2}$ 的解(用含 $a, b$ 的式子表示)为\_\_\_\_\_.

10. 已知:在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$ , $CD$ 是高, $CE$ 是角平分线,若 $\angle DCE = 30^\circ$ ,则 $\angle BAC$ 的度数是\_\_\_\_\_.

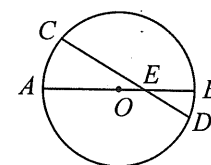
11. 方程 $\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} + \sqrt{\frac{x-1}{x}} = x$ 实数解是 $x =$ \_\_\_\_\_.

12. 已知 $a > b > c$ ,且 $a+b+c=0$ ,抛物线 $y = ax^2 + 2bx + c$ 与 $x$ 轴交于 $A, B$ 两点.则线段 $AB$ 长度的范围是\_\_\_\_\_.

13. 在以平行四边形的顶点和中心这五个点中任意三点为顶点的所有三角形中,任意取出两个,这两个三角形面积相等的概率为\_\_\_\_\_.

14. 已知等腰三角形的两边是关于 $x$ 的方程 $x^2 - 6x + a = 0$ 的两个实数根,那么 $a$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.

15. 如右图,已知 $AB$ 是 $\odot O$ 的直径,弦 $CD$ 交 $AB$ 于 $E, AB = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ ,



$\angle AEC = 30^\circ$ ,则 $CD^2 - AE \cdot BE =$ \_\_\_\_\_.

16. 有16个石子,一个人分若干次取完,每次可以取1个,2个或3个,但是每次取完后都不能留下质数个石子(石子之间不作区分,只考虑石子的个数),则取完16个石子的方法有\_\_\_\_\_种.

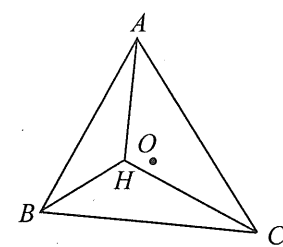
### 三、解答题(共3小题,第17题20分,第18题25分,第19题25分,共70分)

17. 已知:在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 为锐角, $AB = AC$ , $D$ 是边 $BC$ 上的一点,且 $BD = 2CD$ , $AD$ 的延长线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 $E$ ,过 $C$ 作 $CE$ 的垂线交 $AE$ 于 $F$ 点.

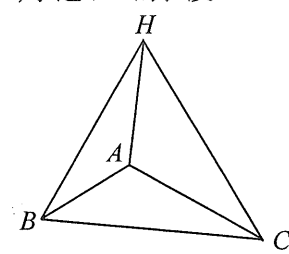
证明:(1)点 $F$ 在线段 $AD$ 内(点 $F$ 异于点 $A$ 和点 $D$ ).

(2)  $\angle BFD = 2\angle CFD$ .

18. 如图1,图2,在 $\triangle ABC$ 中, $H$ 是垂心, $O$ 是外心, $AH$ 等于 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 的半径,边 $AB$ 、 $AC$ 的长度为整数,且周长小于26,面积为 $10\sqrt{3}$ ,求边 $BC$ 的长度.



(图1)



(图2)

19. 已知 $a, b, c$ 都是正整数,且 $a < b < c$ , $(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ 被 $abc$ 整除. 试判断:长度为 $a, b, c$ 的三条线段能否构成一个三角形? 长度为 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 的三条线段能否构成一个三角形? 若能,求出它的面积;若不能,请说明理由.