第十届“创新杯”全国数学邀请赛
初中三年级试题参考答案

一、选择题($5'\times 8=40'$)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	D	B	B	C	A	B

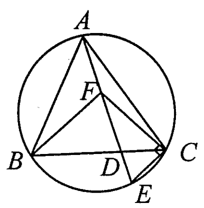
二、填空题($5'\times 8=40'$)

题号	9	10	11	12
答案	$a-2b$ 或 $2a-3b$	20 或 100	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{3}<AB<2\sqrt{3}$

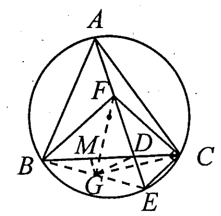
题号	13	14	15	16
答案	$\frac{3}{7}$	$0<a\leqslant 9$	$\frac{5}{3}$	15

三、解答题(第17题20分;第18题、19题各25分,共70分)

17. 证明:



(图1)



(图2)

(1) 如图1,$\angle BCE=\angle BAE<\angle BAC$,又$\angle BAC$为锐角,所以$\angle BCE$为锐角, …3′

又弧$\overset{\frown}{ABE}$为优弧($\because BD=2DC$),所以$\angle ACE$为钝角. …6′

由于$\angle ECF=90°$,因此射线CF位于$\angle ACB$的内部,故点F在线段AD内,且点F异于点A和点D. …10′

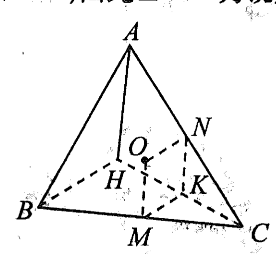
(2) 如图2,连BE,过F作$FG\perp BE$于点G.

在$Rt\triangle FGE$、$Rt\triangle FCE$中,$\angle AEB=\angle ACB=\angle ABC=\angle AEC$,$FE$公共,

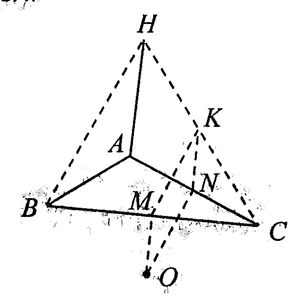
所以$\triangle FGE\cong\triangle FCE$,因此,$\angle EFC=\angle EFG$. …15′

连接DG,则$DG=DC=\frac{1}{2}BD$. 取BD的中点M,连GM,则$DG=DC=\frac{1}{2}BD=DM$. 所以,$MG\perp GC$,又$FE\perp GC$($\because FG=FC,EG=EC$),从而$MG/\!/FE$,G为BE的中点. 因此,$\angle BFE=2\angle EFG=2\angle CFD$. …20′

18. 解:显然,$\angle BAC\neq 90°$,因此$\angle BAC$为锐角或钝角.



(图1)



(图2)

如图1,图2,设$\triangle ABC$的外心为O,外接圆半径为R,过O作$OM\perp BC$于点M,$ON\perp AC$于点N,取CH的中点K,连MK,NK,则四边形$OMKN$为平行四边形.

所以,$OM=NK=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}R$,从而$\angle BOC=120°$,故$\angle BAC=60°$或$120°$ …8′

又$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC$,从而$10\sqrt{3}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$,因此$AB\cdot AC=40$,

由于AB,AC的长为整数,所以AB,AC的长可能为1,40;2,20;4,10或5,8.

又周长小于26,因此AB,AC的长可能为:①4,10或②5,8 …12′

(Ⅰ)当$\angle BAC=60°$时,则$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos 60°=AB^2+AC^2-AB\cdot AC$,

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-AB\cdot AC}$

①AB,AC长为4或10时,$BC=2\sqrt{19}$,由于$AB+AC+BC=14+2\sqrt{19}<26$,

故$BC=2\sqrt{19}$符合要求.

②AB,AC长为5或8时,$BC=7$,由于$AB+AC+BC=20<26$,

故$BC=7$符合要求. …18′

(Ⅱ)当$\angle BAC=120°$时,则$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos 120°=AB^2+AC^2+AB\cdot AC$,

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2+AB\cdot AC}$

①AB,AC长为4或10时,$BC=\sqrt{156}>12$,周长>26,不可,弃之.

②AB,AC长为5或8时,$BC=\sqrt{129}<12$,周长<26,符合要求. …24′

综上述,BC长度为$2\sqrt{19}$,7或$\sqrt{129}$ …25′

19. 解:因为$(ab-1)(bc-1)(ca-1)=abc(abc-a-b-c)+(ab+bc+ca)-1$被$abc$整除,所以$(ab+bc+ca)-1$被$abc$整除,即$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}$为正整数,其中$a,b,c$为正整数. …3′

①求a:

由于$1\leqslant a<b<c$,从而$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}>0$,所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{3}{a}$,

当$a\geqslant 3$时,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{3}{a}\leqslant 1$,$0<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}<1$,

故$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}$不为整数,因此$1\leqslant a\leqslant 2$. …5′

如果$a=1$,则$1+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{bc}$为正整数,从而$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{bc}$为非负整数,

由$a=1$,得$b\geqslant 2$,$c\geqslant 3$,得:$0\leqslant\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{bc}=\frac{c-1}{bc}+\frac{1}{c}<\frac{c-1}{c}+\frac{1}{c}=1$,

所以$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{bc}=0$,$c+b=1$与$c+b\geqslant 5$矛盾,故$a\neq 1$,从而$a=2$, …8′

②求b:

由于$a=2$,知$b\geqslant 3$,如果$b\geqslant 4$,则$c\geqslant 5$,

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}<1$,

$0<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}<1$,与$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}$为正整数矛盾,故$b=3$, …13′

③求c:

由于$a=2$,$b=3$,所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{c}-\frac{1}{6c}=\frac{5c+5}{6c}=1+\frac{5-c}{6c}$为正整数,

因此$c=5$.

综上述,知$a=2$,$b=3$,$c=5$ …18′

④由于$a=2$,$b=3$,$c=5$得$a+b=c$,所以以长度为a,b,c的三条线段为边不能组成三角形. …21′

⑤由于$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}>\sqrt{5}$,即$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$,

所以以长度为$\sqrt{a}$,$\sqrt{b}$,$\sqrt{c}$的三条线段为边可以组成三角形.

由于$(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{5})^2$,即$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2=(\sqrt{c})^2$,所以这个三角形是两直角边长为$\sqrt{a}$和$\sqrt{b}$的直角三角形,其面积为$S=\frac{1}{2}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ …25′